МАТЕМАТИКА

УДК 517.925

О ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ, НЕ ИЗМЕНЯЮЩИХ ОТРАЖАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

В.А. Бельский[1], **В.И. Мироненко**[2]

[1]*Гомельский инженерный институт МЧС Республики Беларусь, Гомель*
[2]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель*

REFLECTING FUNCTION PRESERVING POLINOMIAL PERTURBATIONS OF ABEL EQUATION

V.A. Belsky[1], **V.I. Mironenko**[2]

[1]*Gomel Engineering Institute of the Ministry for Emergency Situations of the Republic of Belarus, Gomel*
[2]*F. Scorina Gomel State University, Gomel*

Получены необходимые и достаточные условия, при которых для заданного уравнения Абеля $\dot{x} = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2 + a_3(t)x^3$ можно построить отличное от него уравнение Абеля с такой же отражающей функцией Мироненко, как и у исходного уравнения. Рассмотрены случаи, когда такие уравнения могут быть эффективно построены.

Ключевые слова: *уравнение Абеля, отражающая функция, эквивалентные уравнения, полиномиальные возмущения.*

In this paper the method of constructing of Abel differential equations possessing the same Mironenko reflecting function is studied. For another equation with the same reflecting function to be constructed, the necessary and sufficient conditions for given Abel equation $\dot{x} = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2 + a_3(t)x^3$ are achieved.

Keywords: *Abel equation, reflecting function, equivalence of differential equations, polynomial perturbations.*

Введение

Приведем здесь необходимые для понимания данной работы сведения из теории отражающей функции [1], [2, с. 62–69], [3, с. 11–16], [4]. Для дифференциальной системы

$$\dot{x} = X(t,x),\ t \in R, \quad x^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D \subset R^n, \tag{0.1}$$

с общим решением $x = \varphi(t; t_0, x_0)$ отражающая функция (ОФ) определяется формулой $F(t,x) = \varphi(-t; t, x)$. Если $F(t,x)$ – ОФ дифференциальной системы (0.1), а $x(t)$ – любое ее решение, определенное при $t = 0$, то $F(t, x(t)) \equiv x(-t)$. Различные дифференциальные системы могут иметь одну и ту же ОФ. Системы с одной и той же ОФ называются **эквивалентными.** Все системы этого класса эквивалентности и только они могут быть записаны в виде

$$\dot{x} = -\frac{1}{2}F_x^{-1}F_t + F_x^{-1}R(t,x) - R(-t,F),$$

где $F(t,x)$ – ОФ, характеризующая этот класс, $R(t,x)$ – произвольная вектор-функция, F_t и F_x – производные функции F по соответствующим переменным. Если система (0.1) 2ω-периодична по t, то $F(-\omega, x)$ является отображением за период $[-\omega, \omega]$ (отображение Пуанкаре). Эквивалентные дифференциальные системы имеют одинаковые операторы сдвига [5, с. 11] вдоль решений на симметричном промежутке времени $[-\omega; \omega]$, и, значит, начальные данные $x(-\omega)$ решений краевых задач вида $\Phi(x(\omega), x(-\omega)) = 0$, где Φ – любая функция для этих систем, совпадают. Дифференцируемая функция $F(t,x)$ будет ОФ дифференциальной системы (0.1) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет основному соотношению

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial F(t,x)}{\partial x}X(t,x) + X(-t, F(t,x)) \equiv 0$$

и начальному условию $F(0,x) \equiv x$.

В основной части данной работы будем широко использовать также следующую теорему

***Теорема* А** [6] (см. также [2, с. 171]). *Пусть непрерывно дифференцируемые вектор-функции*

$$\Delta_i(t,x) = [\Delta_{1i}(t,x), \Delta_{2i}(t,x), \ldots, \Delta_{ni}(t,x)]^T,\ i = \overline{1,k}$$

являются решениями дифференциальной системы

$$\frac{\partial \Delta(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial \Delta(t,x)}{\partial x}X(t,x) - \frac{\partial X(t,x)}{\partial x}\Delta(t,x) = 0. \tag{0.2}$$

Тогда все возмущенные системы вида

$$\dot{x} = X(t,x) + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(t)\Delta_i(t,x), \tag{0.3}$$

где $\alpha_i(t), i=\overline{0,k},$ *– произвольные непрерывные скалярные нечетные функции, эквивалентны системе* (0.1) (k *– любое число или* ∞).

Для изучения дифференциальных систем, кроме работ Мироненко В.И., ОФ применялась также в работах Альсевич Л.А., Вересовича П.П., Кастрицы О.А., Мусафирова Э.В., Чжоу Чжиньсинь и других. В [2] приведен достаточно полный список работ по данной тематике.

1 Возмущения нестационарного уравнения Абеля

Опираясь на результаты теоремы А, для решения поставленных задач мы будем действовать следующим образом. Для исходного уравнения Абеля

$$\dot{x}=a_0(t)+a_1(t)x+a_2(t)x^2+a_3(t)x^3 \quad (1.1)$$

мы будем строить множество возмущенных уравнений (0.3). Как уже отмечалось, все эти уравнения эквивалентны уравнению (1.1). Тогда для того чтобы установить, будет ли другое уравнение Абеля эквивалентно исходному, достаточно будет проверить, содержится ли оно среди построенного класса уравнений (0.3). Или, другими словами, может ли оно быть записано в виде (0.3). Для построения возмущенных уравнений мы будем находить решения уравнения (0.2). Уравнение (0.2) имеет бесконечное множество решений, и найти их все в большинстве случаев невозможно. Поэтому мы ограничимся поисками только полиномиальных $\Delta(t,x)$ вида

$$\Delta(t,x)=r_0(t)+r_1(t)x+\ldots+r_m(t)x^m, \quad (1.2)$$

где коэффициенты $r_j(t), j=\overline{0,m},$ будем считать нужное число раз дифференцируемыми на $\mathbb{R}$ функциями. Такая задача оказывается значительно проще. Далее в уравнениях (0.2) и (0.3) мы будем считать $X(t,x)$ правой часть уравнения (1.1).

***Лемма* 1.1.** *Пусть в уравнении* (1.1) *множество нулей коэффициента* $a_3(t)$ *нигде не плотно на* $\mathbb{R}$. *Тогда если уравнение* (0.2) *имеет ненулевое решение в виде многочлена* (1.2), *то* $m=3$.

Доказательство. В уравнении (0.2) заменим $X(t,x)$ и $\Delta(t,x)$ соответствующими выражениями, причем $r_m(t)$ считаем отличным от тождественного нуля. Получим соотношение

$$\dot{r}_0+\dot{r}_1x+\ldots+\dot{r}_mx^m+$$
$$+(r_1+2r_2x+\ldots+mr_mx^{m-1})(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)-$$
$$-(a_1+2a_2x+3a_3x^2)(r_0+r_1x+\ldots+r_mx^m)=0.$$

Коэффициент при старшей степени в полученном равенстве $r_ma_3(m-3)\equiv 0,$ а это может быть только при $m=3,$ что и требовалось доказать.

Итак, $\Delta(t,x)$ для уравнения (1.1) мы будем искать в виде

$$\Delta(t,x)=r_0(t)+r_1(t)x+r_2(t)x^2+r_3(t)x^3. \quad (1.3)$$

Естественно, что нас интересуют функции $\Delta(t,x),$ отличные от тождественного нуля. Поэтому всюду в дальнейшем мы считаем $r_i(t)$ не обращающимися в нуль одновременно. Кроме того, мы будем считать функции $a_i(t), r_i(t), i=\overline{0,3},$ необходимое число раз дифференцируемыми, чтобы все осуществляемые ниже действия имели смысл. При этом нам наверняка достаточно будет существования непрерывных производных третьего порядка, как у функций $a_i(t),$ так и у $r_i(t).$

***Лемма* 1.2.** *Функция* $\Delta(t,x)$ *вида* (1.3) *является решением уравнения* (0.2) *тогда и только тогда, когда функции* $r_0(t),r_1(t),r_2(t),r_3(t)$ *являются решением системы*

$$\begin{aligned}
&-r_2(t)a_3(t)+a_2(t)r_3(t)=0,\\
&\dot{r}_3(t)-2r_1(t)a_3(t)+2a_1(t)r_3(t)=0,\\
&\dot{r}_2(t)-3r_0(t)a_3(t)+3a_0(t)r_3(t)+\\
&\quad +a_1(t)r_2(t)-a_2(t)r_1(t)=0,\\
&\dot{r}_1(t)+2a_0(t)r_2(t)-2a_2(t)r_0(t)=0,\\
&\dot{r}_0(t)+a_0(t)r_1(t)-a_1(t)r_0(t)=0.
\end{aligned} \quad (1.4)$$

Доказательство. Пусть функция $\Delta(t,x)$ является решением уравнения (0.2). Заменим в уравнении (0.2) $\Delta(t,x)$ в соответствии с выражением (1.3), а $X(t,x)$ – правой частью уравнения (1.1). Получим

$$\frac{\partial\Delta}{\partial t}+\frac{\partial\Delta}{\partial x}X-\frac{\partial X}{\partial x}\Delta=$$
$$=\frac{\partial}{\partial t}[r_0(t)+r_1(t)x+r_2(t)x^2+r_3(t)x^3]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}[r_0(t)+r_1(t)x+r_2(t)x^2+r_3(t)x^3]\cdot$$
$$\cdot[a_0(t)+a_1(t)x+a_2(t)x^2+a_3(t)x^3]-$$
$$-\frac{\partial}{\partial x}[a_0(t)+a_1(t)x+a_2(t)x^2+a_3(t)x^3]\cdot$$
$$\cdot[r_0(t)+r_1(t)x+r_2(t)x^2+r_3(t)x^3].$$

Выполняя дифференцирование, приводя подобные слагаемые по степеням x и приравнивая полученное выражение к нулю, имеем

$$(a_2r_3-r_2a_3)x^4+(\dot{r}_3-2r_1a_3+2a_1r_3)x^3+$$
$$+(\dot{r}_2-3r_0a_3+3a_0r_3+a_1r_2-a_2r_1)x^2+$$
$$+(\dot{r}_1+2a_0r_2-2a_2r_0)x+\dot{r}_0+a_0r_1-2a_1r_0=0.$$

Таким образом, если $\Delta(t,x)$ является решением уравнения (0.2), то каждое слагаемое в последнем уравнении обращается тождественно в нуль, и, значит, функции $r_i(t), i=\overline{0,3}$ являются решением системы (1.4). Очевидно, что обратное утверждение также имеет место. Лемма доказана.

Таким образом, функции $r_i(t), i=\overline{0,3},$ должны удовлетворять переопределенной линейной дифференциально-алгебраической системе, дифференциальная часть которой – линейная система четвертого порядка. Любому решению $(r_0(t), r_1(t), r_2(t), r_3(t))^T$ этой переопределенной системы соответствует полиномиальное решение (1.3) уравнения (0.2) и наоборот. Так как любые $n=5$ решений такой системы линейно зависимы, то у уравнения (0.2), если $X(t,x)$ – многочлен третьей степени, не может существовать более четырех линейно независимых решений.

Введем обозначение

$$\varphi(t) := 27a_0a_3^2 + 2a_2^3 - 9a_1a_2a_3 - 9(\dot{a}_3a_2 - a_3\dot{a}_2).$$

***Лемма* 1.3.** *В точках, где* $a_3(t) \neq 0,$ *система* (1.4) *эквивалентна системе*

$$r_2a_3 = a_2r_3,\ \ 2r_1a_3 = \dot{r}_3 + 2r_3a_1, \qquad (1.5)$$
$$6r_0a_3^3 = \dot{r}_3a_2a_3 + (6a_0a_3^2 + 2\dot{a}_2a_3 - 2a_2\dot{a}_3)r_3,$$
$$3\ddot{r}_3a_3^2 = [-6a_3^2a_1 + 2a_2^2a_3 + 3a_3\dot{a}_3]\dot{r}_3 +$$
$$+[6a_3(\dot{a}_3a_1 - a_3\dot{a}_1) - 4a_2(\dot{a}_3a_2 - a_3\dot{a}_2)]r_3,$$
$$3a_3\varphi\,\dot{r}_3 = 2r_3(3\dot{a}_3\varphi - a_3\dot{\varphi}).$$

Доказательство. Пусть функции $r_i(t)$, $i=\overline{0,3}$ являются решением системы (1.4). Покажем, что из (1.4) следует (1.5). Первые два уравнения

$$r_2a_3 = a_2r_3, \qquad (1.6)$$
$$r_1a_3 = \frac{1}{2}\dot{r}_3 + r_3a_1 \qquad (1.7)$$

системы (1.5) совпадают с первыми уравнениями системы (1.4). Продифференцируем (1.6), помножим обе части на $a_3(t)$ и, используя само соотношение (1.6), приходим к соотношению

$$\dot{r}_2a_3^2 = \dot{r}_3a_3a_2 + (a_3\dot{a}_2 - \dot{a}_3a_2)r_3. \qquad (1.8)$$

Проделав аналогичные действия с (1.7), приходим к соотношению

$$\dot{r}_1a_3^2 = \frac{1}{2}\ddot{r}_3a_3 + (a_3a_1 - \frac{1}{2}\dot{a}_3)\dot{r}_3 - (\dot{a}_3a_1 - a_3\dot{a}_1)r_3. \quad (1.9)$$

Умножим третье уравнение системы (1.4) на a_3^2 и, используя соотношения (1.6)–(1.9), преобразуем его к виду

$$6r_0a_3^3 = \dot{r}_3a_2a_3 + (6a_0a_3^2 + 2\dot{a}_2a_3 - 2a_2\dot{a}_3)r_3. \quad (1.10)$$

Умножим четвертое уравнение системы (1.4) на a_3^3 и, используя соотношения (1.6)–(1.10), преобразуем его к виду

$$\begin{aligned}3\ddot{r}_3a_3^2 &= [-6a_3^2a_1 + 2a_2^2a_3 + 3a_3\dot{a}_3]\dot{r}_3 +\\ &+[6a_3(\dot{a}_3a_1 - a_3\dot{a}_1) - 4a_2(\dot{a}_3a_2 - a_3\dot{a}_2)]r_3.\end{aligned} \qquad (1.11)$$

Наконец, последнее уравнение системы (1.4) умножим на a_3^3 и, используя предыдущие соотношения, запишем его в виде

$$a_3^2(27a_0a_3^2 + 2a_2^3 - 9a_1a_2a_3 - 9(\dot{a}_3a_2 - a_3\dot{a}_2))\dot{r}_3 =$$
$$= 2r_3[-3a_2a_3\ddot{a}_3 - 3a_1a_3^2\dot{a}_2 + 6a_1a_2\dot{a}_3 +$$
$$+9a_2\dot{a}_3^2 + 9\dot{a}_0a_3^3 + 3\ddot{a}_2a_3^2 - 9a_0a_3^2\dot{a}_1 - 3a_1a_3^2\dot{a}_1 +$$
$$+2a_2^2a_3\dot{a}_2 - 2a_2^3\dot{a}_3 - 9a_3\dot{a}_3\dot{a}_2],$$

или, с учетом принятых обозначений,

$$3a_3\varphi\dot{r}_3 = 2r_3(3\dot{a}_3\varphi - a_3\dot{\varphi}). \qquad (1.12)$$

Итак, после преобразований мы из системы (1.4) получили систему (1.5). Покажем теперь, что и систему (1.5) можно преобразовать в систему (1.4). Пусть функции $r_i(t), i=\overline{0,3},$ являются решением системы (1.5). Ранее было показано, что из первых двух уравнений системы (1.5) следуют соответственно соотношения (1.6)–(1.7). Умножим третье уравнение системы (1.4) на a_3^2 и заменим в полученном уравнении $\dot{r}_2a_3^2, r_0a_3^3$ в соответствии с (1.6) и (1.10). Тогда указанное уравнение обратится в тождество. Умножим четвертое уравнение системы (1.4) на a_3^3 и заменим в полученном уравнении $r_2a_3, \dot{r}_1a_3^2, r_0a_3^3$ в соответствии с тождествами (1.6), (1.9), (1.10). При этом четвертое уравнение обращается в тождество.

Осталось показать, что пятое уравнение системы (1.4) также обращается в тождество в силу системы (1.5). Продифференцируем третье тождество системы (1.5) и выразим из него $\dot{r}_0a_3^3$. Умножим пятое уравнение системы (1.4) на a_3^4 и заменим в полученном уравнении $\dot{r}_0a_3^3$, $\ddot{r}_3a_3^2$, $r_0a_3^3, r_1a_3$ согласно соответствующим соотношениям. При этом рассматриваемое уравнение также обращается в тождество. Итак, мы показали, что, если $a_3(t) \neq 0,$ решение системы (1.4) является решением системы (1.5) и наоборот. Лемма доказана.

Наша задача состоит в построении уравнения Абеля, эквивалентного заданному уравнению (1.1). Для решения этой задачи нам необходимо и достаточно знать функцию $\Delta(t,x)$, удовлетворяющую уравнению (0.2). Ниже мы приводим ряд утверждений, раскрывающих, при каких условиях такие функции существуют, а также в некоторых случаях выпишем эти функции в явном виде.

***Теорема* 1.1.** *Для того чтобы для уравнения Абеля* (1.1) *существовала хотя бы одна полиномиальная, тождественно не равная нулю, функция* $\Delta(t,x)$ *вида* (1.3), *удовлетворяющая уравнению* (0.2), *необходимо, чтобы функция* $\varphi(t)$ *удовлетворяла соотношению*

$$\begin{aligned}&3a_3\varphi\ddot{\varphi} + 9\varphi(\dot{\varphi}\,\dot{a}_3 - \varphi\,\ddot{a}_3 - \varphi\,\dot{a}_3a_1 - \varphi\,a_3\dot{a}_1) +\\ &+6\varphi(\dot{\varphi}\,a_1a_3 + \varphi\,a_2\dot{a}_2) - 5a_3\dot{\varphi}^2 - 2a_2^2\varphi\dot{\varphi} = 0.\end{aligned} \qquad (1.13)$$

Доказательство. Пусть функция $\Delta(t,x)$, не равная тождественно нулю и удовлетворяющая уравнению (0.2), существует. Согласно леммам 1.2 и 1.3, это означает, что существует нетривиальное решение системы (1.5). Рассмотрим два последних тождества этой системы. Умножая тождество (1.11) на $\varphi(t)$, получим

$$\begin{aligned}3\ddot{r}_3 a_3^2\varphi &= [-6a_3^2 a_1 + 2a_2^2 a_3 + 3a_3\dot{a}_3]\dot{r}_3\varphi + \\ &+ [6a_3(\dot{a}_3 a_1 - a_3\dot{a}_1) - 4a_2(\dot{a}_3 a_2 - a_3\dot{a}_2)]r_3\varphi.\end{aligned} \tag{1.14}$$

Теперь продифференцируем равенство (1.12) и умножим полученное соотношение на $a_3(t)\varphi(t)$. Получим соотношение

$$\begin{aligned}&\ddot{r}_3 a_3^2\varphi^2 + \dot{r}_3 a_3\varphi(3a_3\dot{\varphi} - 5\dot{a}_3\varphi) + \\ &+ 2r_3 a_3\varphi(3\ddot{a}_3\varphi + 2\dot{a}_3\dot{\varphi} - a_3\ddot{\varphi}) = 0.\end{aligned} \tag{1.15}$$

Заменим в равенстве (1.15) выражения $\dot{r}_3 a_3\varphi$ и $\ddot{r}_3 a_3^2\varphi^2$ в соответствии с соотношениями (1.12) и (1.14). В результате получим тождество

$$\begin{aligned}&(3a_3\varphi\ddot{\varphi} + 9\varphi\,(\dot{\varphi}\dot{a}_3 - \varphi\ddot{a}_3 - \varphi\dot{a}_3 a_1 - \varphi a_3\dot{a}_1) + \\ &+ 6\varphi\,(\dot{\varphi}a_1 a_3 + \varphi a_2\dot{a}_2) - 5a_3\dot{\varphi}^2 - 2a_2^2\varphi\dot{\varphi})r_3 = 0,\end{aligned}$$

которое может выполняться в двух случаях:

1) функция

$$\begin{aligned}\Phi(t) := 3a_3\varphi\ddot{\varphi} &+ 9\varphi\,(\dot{\varphi}\dot{a}_3 - \varphi\ddot{a}_3 - \varphi\dot{a}_3 a_1 - \varphi a_3\dot{a}_1) + \\ &+ 6\varphi\,(\dot{\varphi}a_1 a_3 + \varphi a_2\dot{a}_2) - 5a_3\dot{\varphi}^2 - 2a_2^2\varphi\dot{\varphi}\end{aligned}$$

тождественно равна нулю. Тогда теорема справедлива.

2) $r_3 \equiv 0$ на некотором интервале. В этом случае, как следует из первых трех соотношений системы (1.5), на этом интервале $r_2 \equiv r_1 \equiv r_0 \equiv 0$, т. е. $\Delta(t,x) \equiv 0$. Таким образом, в этом случае нужного нам $\Delta(t,x)$ не существует. Но по нашему предположению ненулевое $\Delta(t,x)$ существует. А потому имеет место (1.13).

Кроме того, могут быть случаи, когда r_3, не являясь тождественным нулем, обращается в нуль в отдельных изолированных точках. Тогда, как и ранее, мы докажем что функция $\Phi(t)$ обращается в нуль всюду, кроме этих изолированных точек. Тогда из непрерывности $\Phi(t)$ следует, что она будет равна нулю и в рассматриваемых точках. Теорема доказана.

***Замечание* 1.1.** Мы доказали теорему 1.1 в том случае, когда $a_3(t)$ не обращается в нуль. Но она будет справедлива и в том случае, когда $a_3(t)$ обращается в нуль лишь в изолированных точках. Доказательство этого достигается доопределением найденной функции $\Delta(t,x)$ до непрерывности.

***Замечание* 1.2.** Из доказанных ниже теорем 1.2 и 1.3 следует, что соотношение (1.13) является не только необходимым, но и достаточным условием для существования уравнения Абеля, эквивалентного данному и несовпадающего с ним.

***Теорема* 1.2.** *Пусть коэффициенты уравнения* (1.1) *удовлетворяют соотношению* (1.13), *причем* $\varphi(t)$ *может обращаться в нуль лишь в изолированных точках. Тогда для уравнения* (1.1) *существует единственное с точностью до постоянного множителя* $\Delta(t,x)$ *вида* (1.3), *причем всюду там, где* $\varphi(t)$ *отлично от нуля, его коэффициенты находятся по формулам*

$$\begin{aligned}r_0(t) &= c\frac{3\varphi(3a_3a_0 + \dot{a}_2) - a_2\dot{\varphi}}{9\sqrt[3]{\varphi^5}}, \\ r_1(t) &= c\frac{3\varphi(a_3a_1 + \dot{a}_3) - a_3\dot{\varphi}}{3\sqrt[3]{\varphi^5}}, \\ r_2(t) &= c\frac{a_3a_2}{\sqrt[3]{\varphi^2}}, \\ r_3(t) &= c\frac{a_3^2}{\sqrt[3]{\varphi^2}},\end{aligned} \tag{1.16}$$

где c – произвольная постоянная.

Доказательство. Из лемм 1.2 и 1.3 следует, что существование функции $\Delta(t,x)$ вида (1.3) равносильно существованию нетривиального решения системы (1.5). Последнее уравнение системы (1.5) представляет собой линейное уравнение относительно неизвестной функции $r_3(t)$. При выполнении условий теоремы его решение всегда существует, единственно и имеет вид

$$r_3(t) = c\frac{a_3^2(t)}{\sqrt[3]{\varphi^2(t)}}. \tag{1.17}$$

Выполнение условия (1.13) означает, что найденная функция $r_3(t)$ удовлетворяет четвертому уравнению системы (1.5). Используя выражение (1.17), из первых трех уравнений системы (1.5) определяем остальные коэффициенты r_0, r_1, r_2 функции $\Delta(t,x)$. Вычисления показывают, что они имеют вид (1.16). Тогда из (1.16) следует, что функция $\Delta(t,x)$ вида (1.3) единственна и определена с точностью до постоянного множителя. Теорема доказана.

Из теоремы А следует, что, при выполнении условий теоремы 1.2, любое уравнение Абеля, которое может быть записано в виде

$$\begin{aligned}\dot{x} = a_0 &+ \alpha(t)\frac{3\varphi(3a_3a_0 + \dot{a}_2) - a_2\dot{\varphi}}{9\sqrt[3]{\varphi^5}} + \\ &+ \left(a_1 + \alpha(t)\frac{3\varphi\,(a_3a_1 + \dot{a}_3) - a_3\dot{\varphi}}{3\sqrt[3]{\varphi^5}}\right)x + \\ &+ \left(a_2 + \alpha(t)\frac{a_3a_2}{\sqrt[3]{\varphi^2}}\right)x^2 + \left(a_3 + \alpha(t)\frac{a_3^2}{\sqrt[3]{\varphi^2}}\right)x^3,\end{aligned} \tag{1.18}$$

где $\alpha(t)$ – произвольная непрерывная скалярная нечетная функция, эквивалентно исходному уравнению Абеля (1.1). Т.е. построен класс уравнений (1.18), эквивалентных уравнению (1.1).

***Замечание* 1.3.** В теореме 1.2 мы полагали, что $\varphi(t) \neq 0$. В тех точках t_i, где $\varphi(t_i) = 0$ уравнение (1.18) также может быть определено, но не для любой произвольной непрерывной нечетной функции $\alpha(t)$, а лишь для таких $\alpha(t)$, для которых существуют пределы

$$\lim_{t\to t_i}\alpha(t)\frac{3\varphi(3a_3a_0+\dot a_2)-a_2\dot\varphi}{9\sqrt[3]{\varphi^5}},$$

$$\lim_{t\to t_i}\alpha(t)\frac{3\varphi(a_3a_1+\dot a_3)-a_3\dot\varphi}{3\sqrt[3]{\varphi^5}},$$

$$\lim_{t\to t_i}\alpha(t)\frac{a_3a_2}{\sqrt[3]{\varphi^2}},\ \lim_{t\to t_i}\alpha(t)\frac{a_3^2}{\sqrt[3]{\varphi^2}},$$

и поэтому коэффициенты уравнения (1.18) в точках t_i можно доопределить до непрерывности.

***Теорема* 1.3.** *Пусть для уравнения Абеля* (1.1) *имеет место соотношение* $\varphi(t)\equiv 0$. *Тогда для этого уравнения существуют две линейно независимые функции* $\Delta(t,x)$ *вида* (1.3), *удовлетворяющие уравнению* (0.2).

Доказательство. Из лемм 1.2 и 1.3 следует, что существование функции $\Delta(t,x)$ равносильно существованию решения системы (1.5). При $\varphi(t)\equiv 0$ последнее уравнение системы (1.5) обращается в тождество, а необходимое условие (1.13) выполняется автоматически. Таким образом, неизвестная функция $r_3(t)$ является решением дифференциального уравнения второго порядка

$$\begin{aligned}&3\ddot r_3a_3^2=[-6a_3^2a_1+2a_2^2a_3+3a_3\dot a_3]\dot r_3+\\&+[6a_3(\dot a_3a_1-a_3\dot a_1)-4a_2(\dot a_3a_2-a_3\dot a_2)]r_3.\end{aligned}\qquad(1.19)$$

В силу сделанных предположений о коэффициентах уравнения (1.1) решение уравнения (1.19) существует и может быть записано в виде $r_3(t)=c_1r_{31}(t)+c_2r_{32}(t)$, где $r_{31}(t),r_{32}(t)$ – два линейно независимых решения этого уравнения. Заменим в первых трех уравнениях системы (1.5) $r_3(t)$ на найденную функцию $r_{31}(t)$. Из полученных соотношений определим остальные коэффициенты $r_{01}(t),r_{11}(t),r_{21}(t)$ функции $\Delta_1(t,x)$. Заменяя в рассматриваемых уравнениях $r_3(t)$ на $r_{32}(t)$ и действуя аналогично, вычислим остальные коэффициенты $r_{02}(t),r_{12}(t),r_{22}(t)$ функции $\Delta_1(t,x)$. Таким образом, нами построены две линейно независимые функции

$$\Delta_1(t,x)=r_{01}(t)+r_{11}(t)x+r_{21}(t)x^2+r_{31}(t)x^3,$$

$$\Delta_2(t,x)=r_{02}(t)+r_{12}(t)x+r_{22}(t)x^2+r_{32}(t)x^3.$$

Теорема доказана.

Основываясь на доказанной теореме, а также в силу теоремы А в случае, когда $\varphi(t)\equiv 0$, мы для уравнения Абеля (1.1) можем построить множество эквивалентных ему уравнений

$$\begin{aligned}\dot x&=a_0(t)+a_1(t)x+a_2(t)x^2+a_3(t)x^3+\\&+\alpha_1(t)\Delta_1(t,x)+\alpha_2(t)\Delta_2(t,x),\end{aligned}$$

где $\alpha_1(t),\alpha_2(t)$ – пробегают класс непрерывных скалярных нечетных функций.

***Пример* 1.1.** Любое уравнение вида

$$\begin{aligned}\dot x&=\cos t+(x-\sin t)^3(1+\alpha_1(t)+\alpha_2(t)t)+\\&+\frac{1}{2}\alpha_2(t)(x-\sin t)\end{aligned}\qquad(1.20)$$

где $\alpha_1(t),\alpha_2(t)$ – произвольные непрерывные скалярные нечетные функции, эквивалентно уравнению

$$\dot x=(x-\sin t)^3+\cos t.\qquad(1.21)$$

Действительно, для уравнения (1.21) имеем $\varphi(t)\equiv 0$. Уравнение (1.19) принимает вид $\ddot r_3=0$, откуда $r_{31}=1,r_{32}=t$. Из трех первых формул системы (1.5) определяем остальные коэффициенты функций $\Delta_1(t,x)$, $\Delta_2(t,x)$. Эти функции имеют вид

$$\Delta_1(t,x)=(x-\sin t)^3,$$

$$\Delta_1(t,x)=\frac{1}{2}(x-\sin t)+t(x-\sin t)^3.$$

Возмущая уравнение (1.21) с помощью найденных $\Delta_1(t,x)$ и $\Delta_2(t,x)$, получим (1.20).

***Замечание* 1.4.** Пусть в уравнении (1.1) коэффициенты $a_1(t),a_2(t),a_3(t)$ заданы и не могут быть изменены, а $a_0(t)$ – произвольный коэффициент. Тогда нетрудно показать, что $a_0(t)$ можно подобрать таким образом, что система (1.5) всегда будет иметь решение. При этом если

$$a_0(t)\equiv\frac{1}{27a_3^2}(-2a_2^3+9a_1a_2a_3+9(\dot a_3a_2-a_3\dot a_2)),$$

то, согласно теореме 1.3, существуют две линейно независимые функции $\Delta_1(t,x)$, $\Delta_2(t,x)$ с указанными выше свойствами. Если

$$a_0(t)\equiv\frac{1}{27a_3^2}(\varphi-2a_2^3+9a_1a_2a_3+9(\dot a_3a_2-a_3\dot a_2)),$$

где $\varphi=\varphi(t)$ не равное тождественно нулю решение уравнения (1.13), то, согласно теореме 1.2, существует лишь одна функция $\Delta(t,x)$, не изменяющая ОФ уравнения (1.1).

Итак, мы показали, что теоремы 1.2 и 1.3 дают нам необходимые и достаточные условия существования функции (или двух линейно-независимых функций) $\Delta(t,x)$ такой, что возмущенное уравнение вида

$$\begin{aligned}\dot x&=a_0(t)+a_1(t)x+a_2(t)x^2+a_3(t)x^3+\\&+\sum_i\alpha_i(t)\Delta_i(t,x)\end{aligned}\qquad(1.22)$$

будет эквивалентно данному уравнению Абеля (1.1). В частности, когда выполнено условие (1.13), а $\varphi(t)$ может обращаться в нуль лишь в изолированных точках, мы можем эффективно построить функцию $\Delta(t,x)$, вычислив ее коэффициенты в соответствии с формулами (1.16), и затем построить уравнения вида (1.22).

Рассмотрим некоторые другие случаи, когда мы можем эффективно построить функцию $\Delta(t,x)$, не изменяющую ОФ уравнения (1.1).

***Теорема* 1.4.** *Пусть для уравнения* (1.1) *выполняется условие* $\varphi(t)\equiv 0$ *и, кроме того,*

$$3a_3(\dot a_3 a_1 - a_3\dot a_1) - 2a_2(\dot a_3 a_2 - a_3\dot a_2)\equiv 0. \quad (1.23)$$

Тогда существуют две линейно независимые функции $\Delta_1(t,x),\Delta_2(t,x)$ *вида* (1.3), *такие что уравнение*

$$\dot x = a_0(t)+a_1(t)x+a_2(t)x^2+a_3(t)x^3+$$
$$+\alpha_1(t)\Delta_1(t,x)+\alpha_2(t)\Delta_2(t,x),$$

где $\alpha_1(t),\alpha_2(t)$ *– произвольные непрерывные скалярные нечетные функции, эквивалентно исходному уравнению* (1.1). *При этом там, где* $\alpha_3(t)\neq 0$, *коэффициенты этих функций вычисляются, соответственно, по формулам*

$$r_{01}=\frac{a_0}{a_3}-\frac{1}{3a_3}\frac{d}{dt}\left(\frac{a_2}{a_3}\right),$$
$$r_{11}=\frac{a_1}{a_3},\ r_{21}=\frac{a_2}{a_3},\ r_{31}=1, \quad (1.24)$$

$$r_{02}=\frac{a_2\psi(t)}{6a_3}+\left[\frac{a_0}{a_3}-\frac{1}{3a_3}\frac{d}{dt}\left(\frac{a_2}{a_3}\right)\right]\int a_3\psi(t)dt,$$
$$r_{12}=\frac{\psi(t)}{2}+\frac{a_1}{a_3}\int a_3\psi(t)dt, \quad (1.25)$$
$$r_{22}=\frac{a_2}{a_3}\int a_3\psi(t)dt,\ r_{32}=\int a_3\psi(t)dt,$$

где $\psi(t):=\exp\left(\int\frac{2a_2^2-6a_3a_1}{3a_3}dt\right).$

Доказательство. Существование двух линейно независимых функций $\Delta_1(t,x),\Delta_2(t,x)$ вида (1.3) следует из теоремы 3. Функцию $r_3(t)$ определим из уравнения (1.19), которое в силу тождества (1.23) принимает вид

$$\ddot r_3=\left(\frac{2a_2^2-6a_3a_1}{3a_3}+\frac{\dot a_3}{a_3}\right)\dot r_3,$$

а его фундаментальная система решений

$$r_{31}=1,\ r_{32}=\int a_3(t)\psi(t)dt. \quad (1.26)$$

Заменяя поочередно в трех первых уравнениях системы (1.5) $r_3(t)$ в соответствии с (1.26), определим из них остальные коэффициенты функций $\Delta_1(t,x),\Delta_2(t,x)$. Вычисления показывают, что эти коэффициенты имеют вид (1.24), (1.25). Таким образом, построены две линейно независимые функции вида (1.3). Теорема доказана.

***Пример* 1.2.** Рассмотрим уравнение

$$\dot x = t^3-1+3t^2x+3tx^2+x^3. \quad (1.27)$$

Для него выполняются все условия теоремы 1.4. Для построения функций $\Delta_1(t,x),\Delta_2(t,x)$ воспользуемся формулами (1.24) и (1.25). Получим

$$\Delta_1(t,x)=t^3-2+3t^2x+3tx^2+x^3,$$
$$\Delta_2(t,x)=t^4-\frac{3}{2}t+(3t^3+\frac{1}{2})x+3t^2x^2+tx^3.$$

Тогда все уравнения вида

$$\dot x=(t^3-1)\big[1+\alpha_1(t)+\alpha_2(t)t\big]-\alpha_1(t)-$$
$$-\frac{1}{2}\alpha_2(t)t+3t^2[1+\alpha_1(t)+\alpha_2(t)t+\frac{1}{2}\alpha_2(t)]x$$
$$+3t\big[1+\alpha_1(t)+\alpha_2(t)t\big]x^2+\big[1+\alpha_1(t)+\alpha_2(t)t\big]x^3,$$

где $\alpha_1(t),\alpha_2(t)$ – произвольные непрерывные скалярные нечетные функции, эквивалентны уравнению (1.27) и между собой.

2 Возмущения уравнения Абеля с постоянными коэффициентами

Пусть в уравнении (1.1) все коэффициенты $a_i(t)=const,\ a_3\neq 0.$ В этом случае для уравнения (1.1) всегда существует эквивалентное ему другое уравнение Абеля, и мы можем его построить.

Обозначим $\varphi_0:=27a_0a_3^2+2a_2^3-9a_1a_2a_3.$ Отметим, что для уравнения (1.1) с постоянными коэффициентами тождество (1.13) всегда выполняется.

Пусть $\varphi_0\neq 0.$ Тогда, как следует из теоремы 1.2, для такого уравнения существует единственная функция $\Delta(t,x)$ вида (1.3). Легко показать, что ее можно записать в виде

$$\Delta(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3, \quad (2.1)$$

и поэтому любое уравнение вида

$$\dot x=(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)(1+\alpha(t))$$

эквивалентно уравнению (1.1). Этот случай тривиален и не представляет для нас интереса, так как к нему можно придти заменой независимого переменного.

Обозначим $\psi_0:=\dfrac{-6a_3a_1+2a_2^2}{3a_3}.$

Пусть $\varphi_0=0.$ Этот случай представляет собой следствие теоремы 1.3.

***Теорема* 2.1.** *Пусть* $\varphi_0=0.$ *Тогда для уравнения* (1.1) *с постоянными коэффициентами*

$$\dot x=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$$

существуют две линейно независимые функции $\Delta_1(t,x),\Delta_2(t,x)$ *вида* (1.3), *такие что уравнение*

$$\dot x=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+$$
$$+\alpha_1(t)\Delta_1(t,x)+\alpha_2(t)\Delta_2(t,x),$$

где $\alpha_1(t),\alpha_2(t)$ *– произвольные непрерывные скалярные нечетные функции, эквивалентно уравнению* (1.1). *При этом эти функции могут быть записаны в виде*

1) *при* $\psi_0=0$ $\Delta_1(t,x)$ *определяется формулой* (2.1),

$$\Delta_2(t,x)=\frac{a_2+6a_0a_3t}{6a_3^2}+\frac{1+2a_1t}{2a_3}x+\frac{a_2t}{a_3}x^2+tx^3,$$

2) *при* $\psi_0 \neq 0$ $\Delta_1(t,x)$ *определяется формулой* (2.1),

$$\Delta_2(t,x) = \frac{e^{\psi_0 t}}{\psi_0}\left(\frac{\psi_0 a_2 + 6a_0 a_3}{6a_3^2} + \frac{\psi_0 + 2a_1}{2a_3}x + \frac{a_2}{a_3}x^2 + x^3\right).$$

Доказательство. Существование двух линейно независимых функций $\Delta_1(t,x), \Delta_2(t,x)$ следует из теоремы 1.3. При этом последнее уравнение системы (1.5) обращается в тождество, а остальные уравнения принимают вид

$$r_2 a_3 = a_2 r_3,\ 2r_1 a_3 = \dot{r}_3 + 2r_3 a_1,$$
$$6r_0 a_3^3 = \dot{r}_3 a_2 a_3 + 6a_0 a_3^2 r_3, \qquad (2.2)$$
$$3\ddot{r}_3 a_3^2 = [-6a_3^2 a_1 + 2a_2^2 a_3]\dot{r}_3.$$

Четвертое уравнение принимает вид $\ddot{r}_3 = 0$ при $\psi_0 = 0$ или $\ddot{r}_3 = \psi_0 \dot{r}_3$ при $\psi_0 \neq 0$. Это уравнение имеет два линейно независимых решения. Вычисляя эти функции и подставляя их в остальные уравнения системы (2.2), построим линейно независимые функции $\Delta_1(t,x), \Delta_2(t,x)$ в каждом из случаев 1) и 2). Теорема доказана.

***Пример* 2.1.** Воспользуемся доказанной теоремой и построим эквивалентные уравнения для уравнения $\dot{x} = -10 + 3x + 6x^2 + x^3$.

Имеем $\varphi_0 = 0$ и $\psi_0 \neq 0$. Тогда

$$\Delta_1(t,x) = -10 + 3x + 6x^2 + x^3,$$
$$\Delta_2(t,x) = e^{18t}(8 + 12x + 6x^2 + x^3).$$

Поэтому любое уравнение, которое может быть записано в виде

$$\dot{x} = [-10 - 10\alpha_1(t) + 8\alpha_2(t)e^{18t}] +$$
$$+[3 + 3\alpha_1(t) + 12\alpha_2(t)e^{18t}]x +$$
$$+6[1 + \alpha_1(t) + \alpha_2(t)e^{18t}]x^2 + [1 + \alpha_1(t) + \alpha_2(t)e^{18t}]x^3,$$

где $\alpha_1(t), \alpha_2(t)$ – произвольные непрерывные скалярные нечетные функции, эквивалентно исходному уравнению.

Заключение

Итак, мы показали, что если для уравнения Абеля (1.1) существует полиномиальное возмущение $\Delta(t,x)$, удовлетворяющее уравнению (0.2) и потому не изменяющее отражающей функции исходного уравнения, то это $\Delta(t,x)$ является многочленом третьей степени. При этом если коэффициенты уравнения удовлетворяют соотношению $\varphi(t) \equiv 0$, то для такого уравнения существуют две линейно независимые функции $\Delta_1(t,x)$ и $\Delta_2(t,x)$ с указанными выше свойствами. Если же указанное соотношение не выполняется, то существует и притом единственное $\Delta(t,x)$ (с точностью до постоянного множителя) только в случае, если коэффициенты уравнения удовлетворяют тождеству (1.13). Последнее соотношение, как показано, является необходимым и достаточным условием существования ненулевого решения уравнения (0.2) в виде многочлена третьей степени. Также мы установили, что для любого стационарного уравнения Абеля существуют две линейно независимые полиномиальные функции $\Delta_1(t,x)$ и $\Delta_2(t,x)$, не изменяющие отражающей функции исходного уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мироненко, В.И.* О методе, позволяющем находить начальные данные периодических решений дифференциальных систем и сравнивать отображения за период / В.И. Мироненко // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т. 14. – № 11. – С. 1985–1994.

2. *Мироненко, В.И.* Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем / В.И. Мироненко. – Гомель : УО ГГУ им. Ф. Скорины, 2004. – 196 с.

3. *Мироненко, В.И.* Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений / В.И. Мироненко. – Минск : Университетское, 1986. – 76 с.

4. *Mironenko, V.I.* Reflecting function [Electronic resource]. – 2010. – Mode of access : http://www.reflecting-function.narod.ru. – Date of access : 16.05.2011.

5. *Красносельский, М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М.А. Красносельский. – М. : Наука, 1966. – 332 с.

6. *Мироненко, В.В.* Возмущения дифференциальных систем, не меняющие временных симметрий / В.В. Мироненко // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40. – № 10. – С. 1325–1332.

Поступила в редакцию 20.05.11.